Zbiory

Zbiór jest pojęciem pierwotnym

Należenie do zbioru jest pojęciem pierwotnym $x \in R$

N – zbiór liczb naturalnych

W – zbiór liczb wymiernych

R – zbiór liczb rzeczywistych

zbiór = mnogość = klasa = rodzina = przestrzeń

Zapis:

$\{a_1, a_2, \ldots., a_k\}$ – zbiór skończony, k-elementowy

$\{a_1, a_2, \ldots., a_{m, \ldots..}\}$ – zbiór nieskończony

$\{x: F(x)\}$ – „przepis" na zbiór, F kryterium należenia

$\{x : x \in N \wedge x < 4\} = \{1,2,3\}$

Zbiór, do którego nie należy żaden element to zbiór pusty, oznaczany $\emptyset$

Zbiór ***R***

Pojęcia pierwotne:

- Zbiór ***R***
- Relacja $\leq$
- Dodawanie $+$
- Mnożenie $\cdot$

Zakładamy, że w zbiorze ***R*** dla każdej pary (x,y) wykonalne jest:

- dodawanie, oznaczone $x + y$
- mnożenie, oznaczone $x \cdot y$

Dodawanie jest:

1. przemienne
2. łączne
3. istnieje moduł dodawania
4. istnieje element przeciwny

Dla każdego $x \in R$ istnieje dokładnie jeden element przeciwny $-x$.

$$x + (-x) = 0$$

$$(b - a = x) \Leftrightarrow (a + x = b)$$

Mnożenie jest:

5. przemienne
6. łączne
7. istnieje moduł mnożenia
8. istnieje element odwrotny

Dla każdego $x \in R - \{0\}$ istnieje dokładnie jeden element odwrotny $\frac{1}{x}$.

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1$$

$$(\frac{b}{a} = x) \Leftrightarrow (a \cdot x = b)$$

9. rozdzielność mnożenia względem dodawania $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
10. spójność relacji $\leq$ $(x \leq y) \vee (x \geq y)$
11. zwrotność relacji $\leq$ $x \leq x$
12. antysymetryczność relacji $\leq$ $[(x \leq y) \wedge (y \leq x)] \Rightarrow x = y$
13. przechodniość relacji $\leq$ $[(x \leq y) \wedge (y \leq z)] \Rightarrow x \leq z$
14. $x \leq y \Rightarrow (x + z \leq y + z)$
15. $(0 \leq x \wedge 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$

Zbiór ***N***

I. $1 \in N$

II. $n \in N \Rightarrow n+1 \in N$

Zbiór ***C***

Jest sumą zbioru ***N***, zbioru wszystkich liczb przeciwnych do liczb naturalnych i zbioru $\{0\}$.

Zbiór ***W***

$$x \in W \Leftrightarrow x = \frac{m}{n}, \quad m \in C, \quad n \in C - \{0\}$$

Zbiór ***IW***

IW = ***R*** - ***W***

Przedział otwarty i przedział domknięty są zbiorami liczb rzeczywistych.

$a, b \in R \wedge a < b$

$x \in (a;b) \Leftrightarrow a < x < b$

$x \in \langle a;b) \Leftrightarrow a \le x < b$

$x \in \langle a;b \rangle \Leftrightarrow a \le x \le b$

$x \in (a;b \rangle \Leftrightarrow a < x \le b$

(b – a) - długość przedziału

Przedziały nieskończone

$x \in (-\infty;a) \Leftrightarrow x < a$

$x \in (-\infty;a \rangle \Leftrightarrow x \le a$

$x \in (a;\infty) \Leftrightarrow x > a$

$x \in \langle a;\infty) \Leftrightarrow x \ge a$

$x \in (-\infty;\infty) = R$

Inny zapis

$(-\infty;0) = R_{-}$

$(0;\infty) = R_{+}$

$\langle 0;\infty)$ liczby nieujemne

Funkcje

X i ***Y*** niepuste zbiory

Funkcją *f* odwzorowującą zbiór ***X*** w zbiór ***Y*** nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi ze zbioru ***X*** dokładnie jednego elementu ze zbioru ***Y***.

$X \to Y$

$y = f(x) \qquad x \in X \quad y \in Y$

Równość funkcji

$\underset{x \in X}{\forall} f_1(x) = f_2(x)$

Funkcja różnowartościowa

$\underset{x_1, x_2 \in X}{\forall} x_1 \neq x_2 \Rightarrow f_1(x) \neq f_2(x)$

Funkcja różnowartościowa w swej dziedzinie ***X*** jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznym

Ograniczenie funkcji

f(*x*) jest określona w zbiorze ***X***

Funkcja *f*(*x*) jest ograniczona z dołu w zbiorze ***X*** $\Leftrightarrow \underset{M}{\exists} \underset{x \in X}{\forall} M \leq f(x)$

Funkcja *f*(*x*) jest ograniczona z góry w zbiorze ***X*** $\Leftrightarrow \underset{M}{\exists} \underset{x \in X}{\forall} M \geq f(x)$

Funkcja *f*(*x*) jest ograniczona w zbiorze ***X*** $\Leftrightarrow \underset{M}{\exists} \underset{x \in X}{\forall} M \geq |f(x)|$

Przykład

Funkcja ograniczona z dołu:	$f(x) = x^4 - 12$	M = ?
Funkcja ograniczona z góry:	$f(x) = -x^2 + 2$	M = ?
Funkcja ograniczona:	$f(x) = sin(x)$	M = ?

Parzystość funkcji

Funkcja $f(x)$ jest parzysta w dziedzinie $\boldsymbol{X}$ $\Leftrightarrow \underset{x \in X}{\forall} -x \in X \wedge f(-x) = f(x)$

Funkcja $f(x)$ jest nieparzysta w dziedzinie $\boldsymbol{X}$ $\Leftrightarrow \underset{x \in X}{\forall} -x \in X \wedge f(-x) = -f(x)$

Monotoniczność funkcji

Funkcja $f(x)$ jest rosnąca w zbiorze $\boldsymbol{X}$ $\Leftrightarrow \underset{x_1, x_2 \in X}{\forall} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Funkcja $f(x)$ jest malejąca w zbiorze $\boldsymbol{X}$ $\Leftrightarrow \underset{x_1, x_2 \in X}{\forall} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Funkcja nierosnąca, funkcja niemalejąca

Funkcja monotoniczna w zbiorze $\boldsymbol{X}$, to funkcja nierosnąca lub niemalejąca w tym zbiorze.

Ciąg liczbowy

Funkcja f mająca dziedzinę $\boldsymbol{N}$ i przeciwdziedzinę $Z \subset R$

$f(x) = f(n) = a_n$

Ciąg rosnący $\Leftrightarrow \underset{n}{\forall} a_n < a_{n+1}$

Ciąg malejący $\Leftrightarrow \underset{n}{\forall} a_n > a_{n+1}$

Ciągi nierosnący i niemalejący określa się analogicznie, jak w przypadku funkcji.

Przykład

Ad. 1 $a_n = 2^n$

Ad. 2 $a_n = 2^{-n}$

Ciąg:

$a_n = 2^n$: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, …

$a_n = \frac{1}{n}$: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

$a_n = n - \frac{1}{n}$

$a_n = 1 - \frac{1}{n}$

$a_n = (-1)^n$

$a_n = 3$

$a_1 = 2 \quad a_2 = 5 \quad a_n = a_{n-2} - 0{,}5 \cdot a_{n-1}$

Granica ciągu

$$\lim a_n = g \Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall} \underset{\delta}{\exists} \underset{n>\delta}{\forall} |a_n - g| < \varepsilon$$

Ciąg, który ma granicę jest zbieżny

Ciąg, który nie ma granicy jest rozbieżny

lim $c = c$

lim $(-1)^n$ nie istnieje

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Ciąg zbieżny jest ograniczony, ale nie zawsze jest odwrotnie: $(-1)^n$.

Działania arytmetyczne na granicach ciągów zbieżnych:

Jeżeli ciągi (a_n), (b_n) są zbieżne, $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, to

$$\lim (a_n + b_n) = a + b$$

$$\lim (a_n - b_n) = a - b$$

$$\lim (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

oraz przy dodatkowym założeniu, że dla każdego n $b_n \neq 0$, oraz $b \neq 0$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

Jeżeli $\lim a_n = 0 \wedge a_n > 0 \Rightarrow \lim \frac{1}{a_n} = \infty$

Jeżeli $\lim a_n = 0 \wedge a_n < 0 \Rightarrow \lim \frac{1}{a_n} = -\infty$

Jeżeli $\lim |a_n| = \infty \Rightarrow \lim \frac{1}{a_n} = 0$

Jeżeli $\lim a_n = \infty \wedge \lim b_n = b \wedge b > 0 \Rightarrow \lim(a_n \cdot b_n) = \infty$

Jeżeli $\lim a_n = \infty \wedge \lim b_n = b \wedge b < 0 \Rightarrow \lim(a_n \cdot b_n) = -\infty$

Jeżeli $\lim |a_n| = \infty \wedge \lim b_n = 0 \Rightarrow \lim(a_n \cdot b_n) = nieokreslone$

Jeżeli $\lim a_n = \lim b_n = \infty \Rightarrow \lim(a_n \cdot b_n) = \infty$

Jeżeli $\lim a_n = \lim b_n = \infty \Rightarrow \lim(a_n - b_n) = nieokreslone$

Jeżeli $\lim a_n = \lim b_n = \infty \Rightarrow \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = nieokreslone$

Jeżeli $\lim a_n = \lim b_n = -\infty \Rightarrow \lim(a_n \cdot b_n) = \infty$

Jeżeli $\lim a_n = \lim b_n = -\infty \Rightarrow \lim(a_n - b_n) = nieokreslone$

Jeżeli $\lim a_n = \lim b_n = -\infty \Rightarrow \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = nieokreslone$

Jeżeli $\lim a_n = \lim b_n = 0 \Rightarrow \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = nieokreslone$

Jeżeli $|a_n| < M \wedge \lim b_n = 0 \Rightarrow \lim(a_n \cdot b_n) = 0$

Jeżeli $|a_n| < M \wedge \lim|b_n| = \infty \Rightarrow \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 0$

Granica funkcji

Granica funkcji w punkcie:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x}{\forall} \left(0 < |x - x_0| < \delta\right) \Rightarrow \left(|f(x) - g| < \varepsilon\right)$$

Granica funkcji *f*(*x*) w punkcie x_0 zależy od właściwości funkcji *f*(*x*) w sąsiedztwie punktu x_0, nie zależy od istnienia funkcji *f*(*x*) w samym punkcie x_0.

$$\lim_{x \to x_0} c = c$$

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0} \qquad x_0 > 0;\ n \in N$$

$$\lim_{x \to x_0} \sin(x) = \sin(x_0)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Działania na granicach funkcji

Jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$ i $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = p$, to

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + h(x)] = g + p$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - h(x)] = g - p$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot h(x)] = g \cdot p$$

oraz przy dodatkowym założeniu, że $p \neq 0$

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{h(x)}\right] = \frac{g}{p}$$

Granica niewłaściwa

Funkcja $f(x)$ jest określona w pewnym sąsiedztwie ***S*** punktu x_0

Funkcja $f(x)$ posiada w <u>punkcie x_0 granicę niewłaściwą</u> -∞ (∞), jeżeli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach zawartych w sąsiedztwie ***S*** i zbieżnego do x_0, ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny do -∞ (∞).

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Przykład:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^4} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-1}{x^4} = -\infty$$

Granica jednostronna

Zastępując sąsiedztwo ***S*** punktu x_0, w poprzedniej definicji, sąsiedztwem lewostronnym (prawostronnym), to otrzymamy definicję granicy lewostronnej (prawostronnej) funkcji $f(x)$.

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) \qquad\qquad \lim_{x \to x_0 +} f(x)$$

Przykład:

$$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^3} = \infty$$

Granica w ∞

Funkcja $f(x)$ posiada w ∞ granicę g, jeżeli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach w zawartych w przedziale $x_n \in (a; +\infty)$, rozbieżnego do +∞, ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do g.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = g$$

Funkcja $f(x)$ posiada w ∞ granicę niewłaściwą -∞ (∞), jeżeli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach w zawartych w przedziale $x_n \in (a;+\infty)$, rozbieżnego do +∞, ciąg ($f(x_n)$) jest rozbieżny do -∞ (∞).

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$$

Przykład:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$$

$$\lim_{x\to-\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$$

Ciągłość funkcji

Funkcja $f(x)$ jest określona w pewnym otoczeniu $\boldsymbol{Q}$ punktu x_0

Funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Ciągłość przedziałami

Funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale otwartym (skończonym lub nieskończonym), jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału.

Przykład:

Funkcja $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ jest ciągła w przedziałach $(-\infty;-1)$ i $(-1;+\infty)$

Funkcja *f*(*x*) jest ciągła prawostronnie (lewostronnie) w punkcie x_0, jeżeli

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0) \qquad\qquad \lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$$

Przykład:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0+} \operatorname{sgn}(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0-} \operatorname{sgn}(x) = -1$$

Funkcja *sgn*(*x*) jest ciągła w przedziałach $(-\infty;0)$ i $(0;+\infty)$ lecz nie jest ciągła punkcie $x_0 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Funkcja *f*(*x*) jest ciągła prawostronnie w $x_0 = 0$ lecz nie jest ciągła lewostronnie w tym punkcie

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 1 = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -1 \neq f(0)$$

Jeżeli funkcja *f*(*x*) nie jest ciągła w punkcie x_0, to punkt x_0 nazywamy <u>punktem nieciągłości</u>.

Pochodna funkcji

Δx przyrost zmiennej niezależnej różny od zera

Δf przyrost zmiennej zależnej

Przyrostowi Δx odpowiada przyrost $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Δx może być dodatni, ujemny

Δf może być dodatni, ujemny, zerowy

Iloraz różnicowy to:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Pochodna funkcji $f(x)$ w punkcie x_0, gdy $\Delta x \to 0$, to granica właściwa ilorazu różnicowego.

$$f^{I}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Jeżeli nie istnieje granica właściwa ilorazu różnicowego $\Delta x \to 0$, to pochodna $f^{I}(x_0)$ nie istnieje.

Pochodna funkcji jest funkcją!

Pochodna funkcji w punkcie jest liczbą!

funkcja $f(x)$	pochodna $f'(x)$	warunki
c	0	$c = \text{const}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	
a^x	$a^x \cdot \ln a$	$a > 0$
e^x	e^x	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$a > 0, a \neq 1, x > 0$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$ $0 < y < \pi$
$\text{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
$\text{arcctg}\, x$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$0 < y < \pi$

Interpretacja geometryczna:

Pochodna funkcji $f(x)$ w punkcie x_0, jest równa tg(α), gdzie α oznacza kąt nachylenia stycznej do krzywej w punkcie (x_0, $f(x_0)$) do osi OX.

Pochodna funkcji $f(x) = x^2$ w punktach: -3, 0, 2

$$f^I(x) = 2\cdot x$$

$$f^I(-3) = 2\cdot(-3) = -6$$

$$f^I(0) = 2\cdot(0) = 0$$

$$f^I(2) = 2\cdot(2) = 4$$

Różniczka funkcji

Jeżeli funkcja $f(x)$, określona w otoczeniu $\boldsymbol{Q}$ punktu x_0, ma pochodną $f^I(x_0)$, to dla każdego przyrostu Δx, takiego, że $x_0 + \Delta x$ należy do tego otoczenia $\boldsymbol{Q}$, odpowiadający mu przyrost funkcji można przedstawić w postaci:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f^I(x_0)\cdot \Delta x - \alpha\cdot\Delta x$$

$\alpha \to 0$, gdy $\Delta x \to 0$

Różniczką funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 dla przyrostu Δx nazywamy wyrażenie:

$$f^I(x_0)\cdot \Delta x = df(x_0) = df$$

Przyrost zmiennej niezależnej Δx nazywamy różniczką zmiennej niezależnej i oznaczamy dx.

Stąd $\quad df(x_0) = f^I(x_0)\cdot dx$

$$\frac{df}{dx} = f^I(x)$$

Pochodne

Jeżeli istnieją pochodne $f^{I}(x)$ i $g^{I}(x)$, to:

$$[f(x)+g(x)]^{I} = f^{I}(x)+g^{I}(x)$$

$$[f(x)-g(x)]^{I} = f^{I}(x)-g^{I}(x)$$

$$[f(x)\cdot g(x)]^{I} = f^{I}(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g^{I}(x)$$

jeżeli $g(x) \neq 0$, to:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^{I} = \frac{f^{I}(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g^{I}(x)}{g^{2}(x)}$$

Jeżeli funkcja $x = h(y)$ jest ściśle monotoniczna i posiada pochodną $h^{I}(y) \neq 0$, to funkcja odwrotna do niej $y = f(x)$ posiada pochodną:

$$f^{I}(x)=\frac{1}{h^{I}(y)}$$

Jeżeli funkcja $u = h(x)$ posiada pochodną $h^{I}(x)$, a funkcja $y = f(u)$ posiada pochodną $f^{I}(u)$, to funkcja złożona $y = f[h(x)]$ ma pochodną $y^{I} = f^{I}[h(x)] \cdot h^{I}(x)$

Wynika z tego:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

Przykład:

$$f(x)=\sin(x^{2}) \qquad f^{I}(x)=\cos(x^{2})\cdot 2\cdot x=2\cdot x\cdot\cos(x^{2})$$

Pochodna logarytmiczna

$$(\ln f(x))^{I} = \frac{f^{I}(x)}{f(x)}$$

Pochodne wyższych rzędów

Jeżeli pochodna $f^{I}(x)$ funkcji $f(x)$ jest funkcją różniczkowalną, to jej pochodna $f^{II}(x)$ nazywa się pochodną drugiego rzędu

$$f^{II}(x) = \left[f^{I}(x)\right]^{I}$$

Analogicznie

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]^{I}$$

Różniczki wyższych rzędów

Warunek:

> funkcja $f(x)$ ma pochodną $f^{I}(x)$ w otoczeniu ***Q*** punktu x_0 oraz ma pochodną $f^{II}(x_0)$ w punkcie x_0. Stąd istnieje $df(x) = f^{I}(x)\cdot dx$

Różniczka w punkcie x_0, dla ustalonego dx jest równa

$$d^2 f(x_0) = f^{II}(x_0)\cdot dx^2$$

Analogicznie:

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)\cdot dx^n$$

Tw. de l'Hospitala

Jeżeli

1. funkcje $\frac{f(x)}{g(x)}$ i $\frac{f^{I}(x)}{g^{I}(x)}$ są określone w pewnym sąsiedztwie punktu x_0,

2. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ lub $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ lub $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$

3. istnieje granica $\lim_{x\to x_0} \frac{f^{I}(x)}{g^{I}(x)}$

to istnieje granica

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{I}(x)}{g^{I}(x)}$$

Przykład:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \underset{H}{=} \lim_{x \to 1} \frac{2 \cdot x}{1} = 2$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \underset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

Tw. Lagrange'a

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a; b \rangle$ oraz ma pierwszą pochodną wewnątrz tego przedziału, to istnieje taki punkt c leżący między a i b, że

$$f(b) - f(a) = f^{I}(c) \cdot (b - a)$$

Stąd, jeżeli funkcja $f(x)$ spełnia warunki twierdzenia Lagrange'a można napisać:

$$\Delta f = f^{I}(c) \cdot \Delta x$$

Ekstremum funkcji

Funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 maksimum lokalne, jeżeli istnieje taka liczba dodatnia δ, że dla każdego x należącego do sąsiedztwa ***S*** punktu x_0 o promieniu δ, spełniona jest nierówność $f(x) \leq f(x_0)$.

Jeżeli $f(x) < f(x_0)$, to maksimum nazywa się właściwym.

Funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 minimum lokalne, jeżeli istnieje taka liczba dodatnia δ, że dla każdego x należącego do sąsiedztwa ***S*** punktu x_0 o promieniu δ, spełniona jest nierówność $f(x) \geq f(x_0)$.

Jeżeli $f(x) > f(x_0)$, to minimum nazywa się właściwym.

Przykład funkcji bez ekstremum

$$f(x) = x \qquad x \in (-1; 2)$$

funkcja w swojej dziedzinie nie przyjmuje ani wartości najmniejszej ani największej.

$f(x) = x \qquad x \in \langle -1;2 \rangle$

funkcja w punkcie -1 przyjmuje wartość najmniejszą, a w punkcie 2 przyjmuje wartość największą lecz nie ma ekstremum (definicja sąsiedztwa!)

Tw. Fermata

Jeżeli funkcja $f(x)$ ma punkcie x_0 ekstremum i ma w tym punkcie pierwszą pochodną, to $f^I(x_0) = 0$

Warunek $f^I(x_0) = 0$ jest warunkiem koniecznym na istnienie ekstremum w punkcie x_0, ale niedostatecznym.

Przykład $f(x) = x^3$

Warunki wystarczające na istnienie ekstremum

I.

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie x_0 i ma pierwszą pochodną w sąsiedztwie ***S*** punktu x_0 o promieniu δ oraz

$f^I(x) < 0$ dla $x_0 - \delta < x < x_0$

i $f^I(x) > 0$ dla $x_0 < x < x_0 + \delta$

to funkcja ma w punkcie x_0 minimum właściwe.

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie x_0 i ma pierwszą pochodną w sąsiedztwie ***S*** punktu x_0 o promieniu δ oraz

$f^I(x) > 0$ dla $x_0 - \delta < x < x_0$

i $f^I(x) < 0$ dla $x_0 < x < x_0 + \delta$

to funkcja ma w punkcie x_0 maksimum właściwe.

lub

II.

Jeżeli funkcja ma w otoczeniu $\boldsymbol{Q}$ punktu x_0 o promieniu δ pochodne do rzędu n włącznie, pochodna $f^{(n)}(x)$ jest ciągła w punkcie x_0, n jest liczbą parzystą i

i $\quad f^{(k)}(x_0) = 0$ dla $k = 1, 2, \ldots, n-1$ oraz $f^{(n)}(x) \neq 0$

i $\quad f^{(n)}(x) > 0$

to funkcja ma w punkcie x_0 <u>minimum właściwe</u>.

Jeżeli funkcja ma w otoczeniu $\boldsymbol{Q}$ punktu x_0 o promieniu δ pochodne do rzędu n włącznie, pochodna $f^{(n)}(x)$ jest ciągła w punkcie x_0, n jest liczbą parzystą

i $\quad f^{(k)}(x_0) = 0$ dla $k = 1, 2, \ldots, n-1$ oraz $f^{(n)}(x) \neq 0$

i $\quad f^{(n)}(x) < 0$

to funkcja ma w punkcie x_0 <u>maksimum właściwe</u>.

Punkt przegięcia

Krzywa $f(x)$ nazywa się wypukłą w przedziale $(a;b)$, jeżeli jest położona <u>nad</u> styczną poprowadzoną do niej w dowolnym jej punkcie, dla każdego $x \in (a;b)$

Krzywa $f(x)$ nazywa się wklęsłą w przedziale $(a;b)$, jeżeli jest położona <u>pod</u> styczną poprowadzoną do niej w dowolnym jej punkcie, dla każdego $x \in (a;b)$

Warunek wystarczający, aby krzywa $f(x)$ była w przedziale $(a;b)$ wypukła: $f^{II}(x) > 0$ dla każdego $x \in (a;b)$

Warunek wystarczający, aby krzywa $f(x)$ była w przedziale $(a;b)$ wklęsła: $f^{II}(x) < 0$ dla każdego $x \in (a;b)$

Punkt przegięcia

Punkt $P(x_0, f(x_0))$ nazywamy punktem przegięcia krzywej $f(x)$, jeżeli krzywa ta jest wypukła w lewostronnym sąsiedztwie $\boldsymbol{S}$ punktu x_0 i wklęsła w prawostronnym sąsiedztwie $\boldsymbol{S}$ punktu x_0 lub na odwrót.

Warunek konieczny, aby punkt $P(x_0, f(x_0))$ był punktem przegięcia krzywej $f(x)$ jest

$f^{II}(x_0) = 0$

Warunek wystarczający, aby punkt $P(x_0, f(x_0))$ był punktem przegięcia krzywej $f(x)$ jest

$f^{II}(x) < 0$ dla $x < x_0$

$f^{II}(x) = 0$ dla $x = x_0$

$f^{II}(x) > 0$ dla $x > x_0$

albo

$f^{II}(x) > 0$ dla $x < x_0$

$f^{II}(x) = 0$ dla $x = x_0$

$f^{II}(x) < 0$ dla $x > x_0$

dla każdego x należącego do sąsiedztwa $\boldsymbol{S}$ punktu x_0.

Badanie funkcji

Badanie funkcji obejmuje określenie cech charakterystycznych danej funkcji $f(x)$. Obejmuje:

Określenie dziedziny, granic na krańcach dziedziny, parzystości, okresowości…

Analizę pierwszej pochodnej, ekstremów, monotoniczności

Analizę drugiej pochodnej, znajdowanie punktów przegięcia, przedziałów wklęsłości i wypukłości

Sporządzenie tabeli zmienności funkcji

Sporządzenie wykresu

Przykład

$f(x) = x^3 + 2 \cdot x^2 - 6$

Dziedzina: $x \in R$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$$

$$f^{I}(x) = 3\cdot x^2 + 4\cdot x$$

$f^{I}(x) = 0$ to $3\cdot x^2 + 4\cdot x = 0$

$$3\cdot x^2 + 4\cdot x = x\cdot(3\cdot x + 4)$$

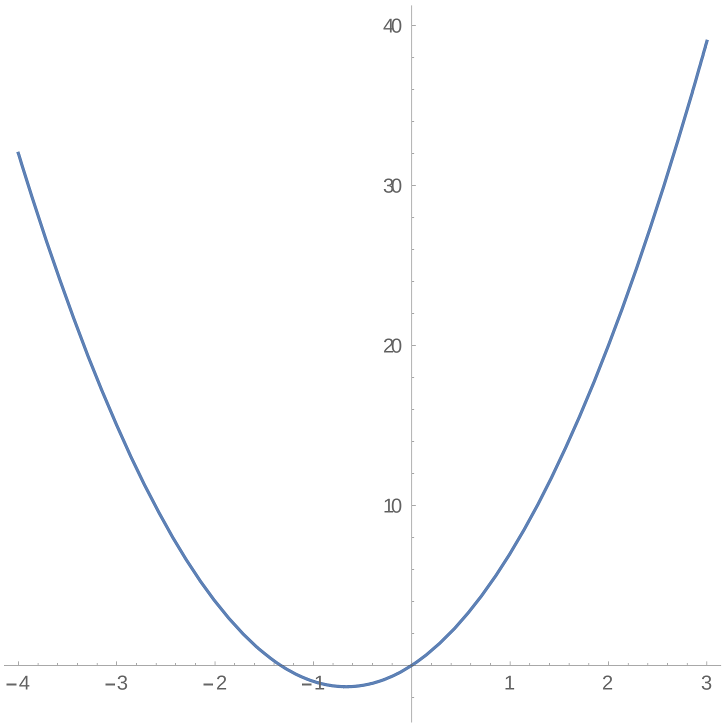
$f^{I}(x) = 0$ gdy $x = 0$ lub $x = -\frac{4}{3}$

dla $x < -\frac{4}{3}$ $f^{I}(x) > 0$

dla $-\frac{4}{3} < x < 0$ $f^{I}(x) < 0$

dla $x > 0$ $f^{I}(x) > 0$

Wykres pochodnej:



$f^{II}(x) = 6 \cdot x + 4$

$f^{II}(x) = 0 \qquad$ gdy $\qquad x = -\frac{2}{3}$

$f^{II}(x) < 0 \qquad$ dla $\qquad x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$

$f^{II}(x) > 0 \qquad$ dla $\qquad x \in \left(-\frac{2}{3}; \infty\right)$

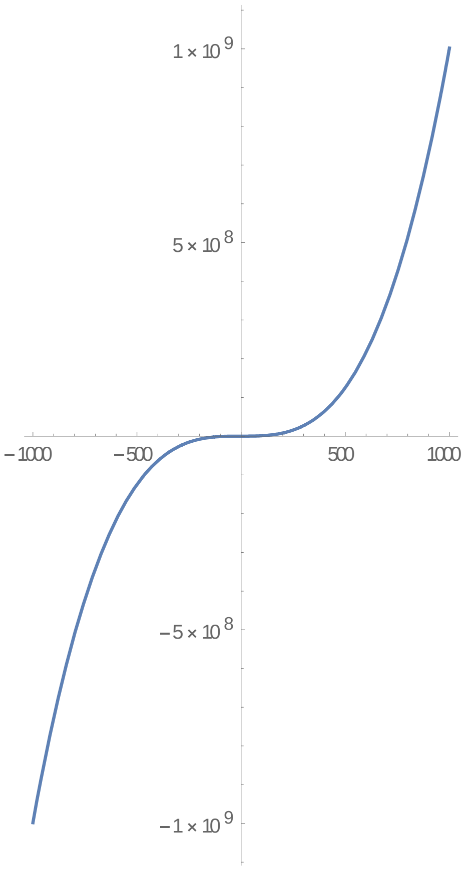
Ponieważ dla *x = 0* pierwsza pochodna jest równa *0*, druga pochodna jest różna od zera, trzecia pochodna jest stała i równa *6*, zaś kolejne są równe 0, to dla *x = 0* funkcja nie ma ekstremum absolutnego. Natomiast ma w tym punkcie minimum właściwe. $f(0) = -6$

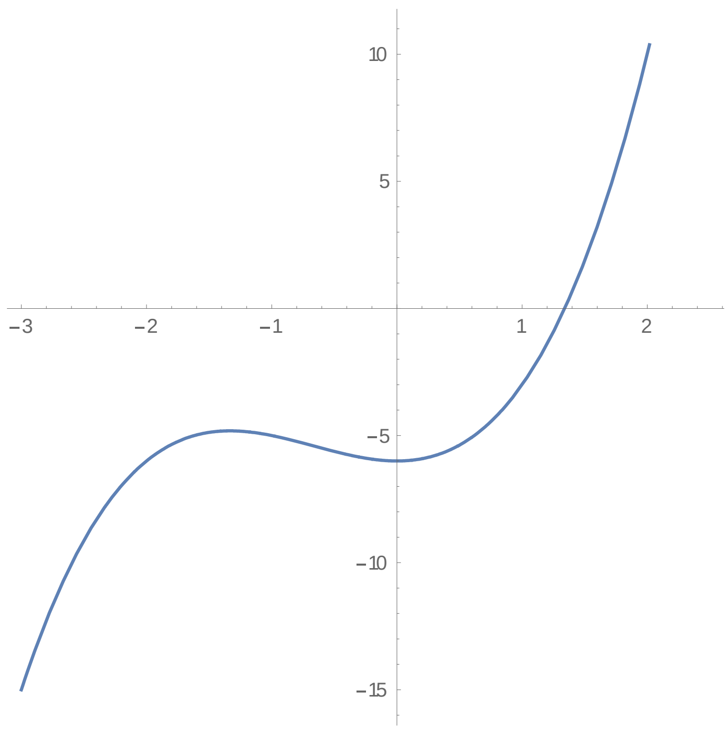
Ponieważ dla $x = -\frac{4}{3}$ pierwsza pochodna jest równa *0*, druga pochodna jest różna od zera, trzecia pochodna jest stała i równa *6*, zaś kolejne są równe 0, to dla $x = -\frac{4}{3}$ funkcja nie ma ekstremum absolutnego. Natomiast ma w tym punkcie maksimum właściwe. $f(-\frac{4}{3}) = -\frac{130}{27}$

W przedziale $x \in \left(-\frac{2}{3}; \infty\right)$ funkcja jest wypukła.

W przedziale $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$ funkcja jest wklęsła.

Punkt $x = -\frac{2}{3}$ jest punktem przegięcia


1 × 10^9
5 × 10^8
−1000
−500
500
1000
−5 × 10^8
−1 × 10^9


10
5
−3
−2
−1
1
2
−5
−10
−15

Całki

Funkcja pierwotna

$f(x)$ jest określona w zbiorze $\boldsymbol{X}$

Funkcję $F(x)$ nazywamy funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ w przedziale $\boldsymbol{X}$, jeżeli dla każdego $x \in X$ spełniony jest warunek:

$$F^I(x) = f(x)$$

Jest to równoważne:

$$dF(x) = f(x)\, dx$$

Jeżeli $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ w przedziale $\boldsymbol{X}$, to:

- funkcja $G(x) = F(x) + c$, $c = const$, jest także funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ w przedziale $\boldsymbol{X}$,

- każdą funkcję pierwotną $G(x)$ funkcji $f(x)$ w przedziale $\boldsymbol{X}$, można przedstawić w postaci $F(x) + c^*$, gdzie $c^* = const$, jest dobrane odpowiednio do $F(x)$ i $G(x)$.

Funkcja pierwotna jest określona z dokładnością do stałego składnika $c = const$.

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale $\boldsymbol{X}$, to posiada w tym przedziale funkcję pierwotną.

Całka nieoznaczona

Zbiór wszystkich funkcji pierwotnych funkcji $f(x)$ w przedziale $\boldsymbol{X}$ nazywa się całką nieoznaczoną funkcji $f(x)$ w tym przedziale $\int f(x)dx$

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Przykład

$$\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$$

Jeżeli funkcje *f*(*x*) i *h*(*x*) są całkowalne w sensie Newtona w pewnym przedziale, to:

$$\int [f(x) + h(x)]dx = \int f(x)dx + \int h(x)dx$$

$$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$$

Całkowanie przez części

Jeżeli funkcje *f*(*x*) i *h*(*x*) mają w pewnym przedziale ciągłe pochodne $f^{I}(x)$ i $h^{I}(x)$, to:

$$\int f(x) \cdot h^{I}(x)dx = f(x) \cdot h(x) - \int f^{I}(x) \cdot h(x)dx$$

Całkowanie przez podstawianie

Podstawienie $t = h(x)$

Jeżeli:

- funkcja *h*(*x*) jest różniczkowalna w przedziale ***X*** i przekształca go na przedział ***T***,

- funkcja *g*(*t*) ma w przedziale ***T*** funkcję pierwotną *G*(*t*),

- $f(x) = g[h(x)] \cdot h^{I}(x)$ w przedziale ***X***

to:

$$\int f(x)dx = G[h(x) + c]$$

Przykład

$\int (4 \cdot x - 5)^2 dx$ podstawienie $t = 4 \cdot x - 5$

$\int x \cdot \sin(x^2)dx$ podstawienie $t = x^2$

$\int \frac{xdx}{1 + x^2}$ podstawienie $t = 1 + x^2$

$\int \frac{dx}{9 + x^2}$ podstawienie $t = \frac{x}{\sqrt{9}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}} \qquad \text{podstawienie} \quad t = \frac{x}{\sqrt{8}}$$

Podstawienie $x = g(t)$

Jeżeli:

- funkcja $g(t)$ jest różniczkowalna i różnowartościowa w przedziale $\boldsymbol{T}$ i przekształca go na przedział $\boldsymbol{X}$,

- funkcja $f(x)$ ma w przedziale $\boldsymbol{X}$ funkcję pierwotną $F(x)$,

to:

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)] \cdot g^{I}(t)dt$$

Przykład

$$\int \frac{\arcsin(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{podstawienie} \quad x = \sin t$$

$\int dx = x + c$	
$\int 0 dx = c$	
$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$\alpha \neq -1$
$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + c$	
$\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + c$	$a > 0$ i $a \neq 1$
$\int e^{x} dx = e^{x} + c$	
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	
$\int \cos x dx = \sin x + c$	
$\int \frac{1}{\sin^{2} x} dx = -\mathrm{ctg}\, x + c$	
$\int \frac{1}{\cos^{2} x} dx = \mathrm{tg}\, x + c$	
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}} dx = \arcsin x + c$	
$\int \frac{1}{1+x^{2}} dx = \mathrm{arctg}\, x + c$	

Całka oznaczona

Funkcja $f(x)$ jest określona i ograniczona w przedziale $\langle a;b \rangle$.

Przedział $\langle a;b \rangle$ dzielimy punktami $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{n-1}$ na skończoną liczbę podprzedziałów o dowolnej długości: $a < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \ldots < x_{n-1} < b$

Długość przedziału $\langle x_k ; x_{k-1} \rangle$ oznaczona jest $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

W każdym przedziale $\langle x_k ; x_{k-1} \rangle$ wybrany jest dowolny punkt ξ_k

Obliczamy sumy:

$$sd_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k \qquad \text{sumę dolną}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \qquad \text{sumę całkową}$$

$$sg_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k \qquad \text{sumę górną}$$

gdzie m_k i M_k oznaczają kres dolny i kres górny funkcji $f(x)$ dla danego k-tego przedziału $\langle x_k ; x_{k-1} \rangle$,
$k = 1, 2, \ldots, n$

Zawsze jest:

$$sd_n \le s_n \le sg_n$$

Ciąg (Δ_n) nazywamy ciągiem normalnym podziałów, gdy liczba $\delta_n = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k$ dąży do zera.

Def.

Jeżeli dla każdego ciągu normalnego podziałów przedziału $\langle a;b \rangle$, ciąg sum całkowych jest zbieżny do granicy właściwej, niezależnej od wyboru punktów ξ_k, to granica ta nazywa się całką oznaczoną funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle a;b \rangle$

Inaczej mówiąc

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

Warunki całkowalności

Warunek konieczny lecz niewystarczający - funkcja *f*(*x*) określona w przedziale $\langle a;b\rangle$ jest w tym przedziale ograniczona.

Tw. (Warunek konieczny i wystarczający)

Całka oznaczona istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice sumy dolnej i sumy górnej i są sobie równe.

$$\lim_{\delta_n \to 0} sd_n = \lim_{\delta_n \to 0} sg_n$$

Tw. (Warunek wystarczający)

Funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest w tym przedziale całkowalna.

Tw.

Funkcja monotoniczna w przedziale domkniętym jest w tym przedziale całkowalna.

Właściwości całki oznaczonej

Tw.

Jeżeli funkcje *f*(*x*) i *h*(*x*) są całkowalne w przedziale $\langle a;b\rangle$, to:

- funkcja *f*(*x*) + *h*(*x*) jest całkowalna w przedziale $\langle a;b\rangle$ i

$$\int_a^b [f(x)+h(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b h(x)dx$$

- funkcja *C* · *f*(*x*), *C* = *const*, jest całkowalna w przedziale $\langle a;b\rangle$ i

$$\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx$$

- funkcja *f*(*x*) · *h*(*x*) jest całkowalna w przedziale $\langle a;b\rangle$.

Tw.

Jeżeli funkcja *f*(*x*) jest całkowalna w przedziale $\langle a;b\rangle$ i $c\in\langle a;b\rangle$, to:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

Tw.

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $\langle a;b\rangle$, to funkcja $|f(x)|$ jest także całkowalna w przedziale $\langle a;b\rangle$.

Tw.

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $\langle a;b\rangle$, zaś α i β ($\alpha < \beta$) są dowolnymi punktami z tego przedziału, to funkcja $f(x)$ jest także całkowalna w przedziale $\langle \alpha;\beta\rangle$.

Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $\langle a;b\rangle$, zaś α jest dowolnie ustaloną liczbą z tego przedziału $a<\alpha<b$. Dla każdego $x\in\langle a;b\rangle$ wartość całki $\int_\alpha^x f(z)dz$ jest określona. Z tego wynika, że funkcja $F(x)=\int_\alpha^x f(z)dz$ jest określona w przedziale $\langle a;b\rangle$.

F(*x*) jest funkcją górnej granicy całkowania.

Przykład:

$$f(x)=e^x \qquad \alpha=0$$

$$F(x)=\int_0^x f(z)dz=\int_0^x e^z dz=e^z\Big|_0^x=e^x-e^0=e^x-1$$

Tw.

Jeżeli funkcja *f*(*x*) jest całkowalna w przedziale $\langle a;b\rangle$ i $\alpha \in \langle a;b\rangle$, to funkcja $F(x)=\int\limits_{\alpha}^{x} f(z)dz$ ma chodną $F^{I}(x)= f(x)$.

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{\alpha}^{x} f(z)dz = f(x)$$

Tw.

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $\langle a;b\rangle$, zaś *F*(*x*) jest jakąkolwiek funkcją pierwotną funkcji w tym przedziale, to $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F(b)-F(a)$

Tw. (twierdzenie całkowe o wartości średniej)

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale $\langle a;b\rangle$, to istnieje taki punkt $c \in \langle a;b\rangle$, że

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$$

Iloraz $\dfrac{\int\limits_{a}^{b} f(x)dx}{(b-a)}$ nazywa się wartością średnią funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle a;b\rangle$.

Tw. (twierdzenie o zmianie zmiennej w całce oznaczonej)

Jeżeli:

- funkcja $g(t)$ ma ciągłą pochodną $g^{I}(t)$ w przedziale domkniętym ***T*** o końcach *α* i *β*,

- funkcja $f(x)$ jest ciągła w zbiorze wartości *x*, jakie przyjmuje funkcja $g(t)$ w przedziale ***T***,

- $g(\alpha)=a$ i $g(\beta)=b$

to $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[g(t)]\cdot g^{I}(t)dt$

Równania różniczkowe

Pojęciem równanie różniczkowe określa się równanie zawierające pochodne funkcji niewiadomej.

Równanie różniczkowe zawierające pochodne funkcji jednej zmiennej, nazywa się **równaniem różniczkowym zwyczajnym**.

Równanie różniczkowe zawierające pochodne cząstkowe funkcji wielu zmiennych nazywa się **równaniem różniczkowym cząstkowym**.

Postać ogólna równania różniczkowego rzędu pierwszego:

$$F(x,y(x),y^{I}(x)) = 0$$

Jeżeli udaje się rozwikłać równanie ze względu na pochodną funkcji uwikłanej, wówczas otrzymuje się **postać normalną równania różniczkowego rzędu pierwszego**.

$$y^{I}(x) = f(x,y(x))$$

określoną na dziedzinie $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{R}^2$.

Def.

Rozwiązaniem **postaci normalnej równania różniczkowego rzędu pierwszego** nazywa się funkcję $y(x)$ określoną na pewnym przedziale $\boldsymbol{Y} \subset \boldsymbol{R}$ spełniającą warunki:

- $y(x)$ jest różniczkowalna na przedziale $\boldsymbol{Y}$
- $\underset{x \in Y}{\forall} f(x, y(x)) \in \boldsymbol{D}$
- $y'(x) = f(x, y(x))$

Równanie różniczkowe ma nieskończenie wiele rozwiązań. Dlatego, gdy to możliwe, określa się problem początkowy Cauchy'ego:

- $y'(x) = f(x, y(x))$
- $y(x_0) = y_0$

Wybrane typy równań różniczkowych rzędu pierwszego

Równanie o zmiennych rozdzielonych:

$$y^I(x) = g(x) \cdot h(y(x))$$

Jeżeli $h(y_0) = 0$ dla pewnego y_0, to funkcja stała $y(x) = y_0$ jest jednym z rozwiązań równania o zmiennych rozdzielonych.

W obszarze, w którym $h(y(x)) \neq 0$ równanie o zmiennych rozdzielonych zapisuje się w postaci:

$$\frac{y^I(x)}{h(y(x))} = g(x)$$

lub

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$$

Stąd:

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$$

Wynikiem jest $y = y(x)$ i dowolna stała C.

Przykład 1

$$y^I(x) = x \cdot y$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = xdx$$

$$\ln|y(x)| = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 + C}$$

$y(x) = C_1 \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$

Przykład 2

$y^I(x) = y^{-3}(x)$

Rozwiązaniem jest $y(x) = 0$ oraz:

$$\frac{dy}{dx} = y^{-3}(x)$$

$$\frac{dy}{y^{-3}(x)} = dx$$

$$y^3(x)dy = dx$$

$$\frac{1}{4}y^4(x) = x + C$$

$$y(x) = \sqrt[4]{4 \cdot x + C}$$

Równanie jednorodne:

$$y^I(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right)$$

Podstawiając $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ (obowiązuje dla $x \neq 0$) otrzyma się równanie o zmiennych rozdzielonych:

$$y(x) = x \cdot z(x) \rightarrow y^I(x) = z(x) + x \cdot z^I(x) \rightarrow f(z(x)) = z(x) + x \cdot z^I(x) \rightarrow$$
$$\rightarrow f(z(x)) - z(x) = x \cdot z^I(x)$$

lub

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}$$

Stąd:

$$\int \frac{dz}{f(z)-z} = \int \frac{dx}{x}$$

Wynikiem jest $y(x) = x \cdot z(x)$ i dowolna stała C.

Przykład 1

$$x^2 \cdot y^I(x) = x \cdot y(x) + y^2(x)$$

Rozwiązaniem jest $y(x) = 0$ oraz:

dla $x \neq 0$

$$y^I(x) = \frac{y(x)}{x} + \frac{y^2(x)}{x^2}$$

$$z(x) + x \cdot z^I(x) = z(x) + z^2(x)$$

$$x \cdot z^I(x) = z^2(x)$$

$$\frac{dz}{z^2(x)} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{-1}{z(x)} = \ln|x| + C_1$$

$$z(x) = \frac{-1}{\ln|x| + C_1}$$

$$y(x) = \frac{-x}{\ln|x| + C_1}$$

Przykład 2

$$x \cdot y^I(x) = y(x) + x^3$$

dla $x \neq 0$

$$y^I(x) = \frac{y(x)}{x} + x^2$$

$$z(x) + x \cdot z^I(x) = z(x) + x^2$$

$$x \cdot z^{I}(x) = x^{2}$$

$$z^{I}(x) = x$$

$$dz = xdx$$

$$z(x) = \frac{1}{2}x^{2} + C$$

$$y(x) = \frac{1}{2}x^{3} + C \cdot x$$

Równanie o postaci:

$$y^{I}(x) = f\left(a \cdot x + b \cdot y(x) + c\right),\ b \neq 0$$

Podstawiając $z(x) = a \cdot x + b \cdot y(x) + c$ otrzyma się równanie o zmiennych rozdzielonych:

$$z^{I}(x) = a + b \cdot y^{I}(x) \rightarrow y^{I}(x) = \frac{z^{I}(x) - a}{b} \rightarrow f(z(x)) = \frac{z^{I}(x) - a}{b} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{dz}{b \cdot f(z) + a} = dx$$

Stąd:

$$\int \frac{dz}{b \cdot f(z) + a} = \int dx$$

Przykład 1

$$y^{I}(x) = (x + y(x))^{2},$$

$$z(x) = x + y(x)$$

$$z^{I}(x) = 1 + y^{I}(x)$$

$$y^{I}(x) = z^{I}(x) - 1$$

$$z^{I}(x) - 1 = z^{2}(x)$$

$$z^{I}(x) = z^{2}(x) + 1$$

$$\frac{dz}{1 + z^{2}(x)} = dx$$

$$\operatorname{arctg}(z) = x + C$$

$$z(x) = \operatorname{tg}(x + C)$$

$$y(x) = -x + \operatorname{tg}(x + C)$$

Równanie różniczkowe liniowe rzędu pierwszego

Def.

Równanie o postaci:

$$y^{I}(x) = p(x) \cdot y(x) + f(x)$$

gdzie $p(x)$ i $f(x)$ są funkcjami danymi, ciągłymi w przedziale (a, b) nazywa się równaniem różniczkowym liniowym rzędu pierwszego

Uniwersalna metoda rozwiązania (**metoda uzmienniania stałej**):

I. etap

funkcję $f(x)$ zastępuje się funkcją równą tożsamościowo zeru

rozwiązuje się równanie jednorodne:

$$y^{I}(x) = p(x) \cdot y(x)$$

$$\frac{dy}{y(x)} = p(x)dx$$

$$\ln|y(x)| = \int p(x)dx + C_1$$

$$y(x) = e^{\int p(x)dx + C_1} = C \cdot e^{\int p(x)dx}$$

II. etap

uzmiennia się stałą C występującą w rozwiązaniu równania jednorodnego z etapu I

$C \to C(x)$

$$y(x) = C(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$y^{I}(x) = C^{I}(x) \cdot e^{\int p(x)dx} + C(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot p(x)$$

podstawia się obliczoną wartość $y(x)$ i $y'(x)$ do równania niejednorodnego

$$p(x) \cdot C(x) \cdot e^{\int p(x)dx} + f(x) = C^{I}(x) \cdot e^{\int p(x)dx} + C(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot p(x)$$

i oblicza $C(x)$

III. etap

podstawia się obliczoną wartość $C(x)$ do równania $y(x) = C(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$

Przykłady równań różniczkowych liniowych rzędu pierwszego

$$y^I(x) = -2 \cdot y(x) + 5 \cdot \cos(x)$$

$$y^I(x) = \mathrm{ctg}(x) \cdot y(x) + \cos^3(x)$$

Równanie Bernouliego:

$$y^I(x) = p(x) \cdot y(x) + q(x) \cdot y^r(x),$$

Rozwiązuje się podstawiając $z(x) = y^{1-r}(x)$, (gdy $r > 0$ $y > 0$) i doprowadzając do równania liniowego niejednorodnego.

Przykład 1

$$y^I(x) = x^3 \cdot y(x) + x^3 \cdot \sqrt{y(x)}$$

$$r = \frac{1}{2} \quad \rightarrow z(x) = y^{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{y(x)}$$

$$z(x) = y^{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{y(x)}$$

$$y(x) = z^2(x)$$

$$y^I(x) = 2 \cdot z(x) \cdot z^I(x)$$

$$2 \cdot z(x) \cdot z^I(x) = x^3 \cdot z^2(x) + x^3 \cdot z(x)$$

$$z^I(x) = \frac{x^3 \cdot z(x) + x^3}{2} = \frac{x^3}{2} \cdot (z(x) + 1)$$

$$\frac{dz}{1 + z(x)} = \frac{x^3}{2} dx$$

$$\ln|1 + z(x)| = \frac{1}{8} x^4 + C_1$$

$$1+z(x)=e^{\frac{1}{8}x^4+C_1}$$

$$z(x)=e^{\frac{1}{8}x^4+C_1}-1=C\cdot e^{\frac{1}{8}x^4}-1$$

$$y(x)=\left(C\cdot e^{\frac{1}{8}x^4}-1\right)^2$$

Równanie Riccatiego:

$$y^I(x)=a(x)\cdot y^2(x)+b(x)\cdot y(x)+c(x),$$

Rozwiązuje się podstawiając $u(x)=y(x)-y_1(x)$ i doprowadzając do równania Bernouliego

Literatura:

W. Żakowski Matematyka cz.I WNT Warszawa

W. Żakowski, W. Leksiński Matematyka cz.IV WNT Warszawa