

Analiza niepewności pomiarowych

Na ogół nie jest znana wartość wielkości mierzonej. Dlatego nie można obliczyć **błędu pomiaru** zdefiniowanego jako **różnica między wartością wyznaczoną wielkości mierzonej, a wartością rzeczywistą**

**Wówczas szacuje się niepewność
pomiarową i najbardziej
prawdopodobną wartość wielkości
mierzonej**

Sposób zapisu wyniku pomiaru:

**najbardziej prawdopodobna wartość
wielkości mierzonej $\pm$ niepewność
pomiarowa**

O sposobie obliczenia niepewności
pomiarowej i najbardziej prawdopodobnej
wartość wielkości mierzonej decydują:

1. sposób wyznaczenia nieznanej wartości
– pomiar bezpośredni lub pośredni

2. liczebność pomiarów – jeden pomiar lub seria pomiarów (wielokrotnie mierzymy tę samą wielkość). W przypadku serii pomiarowej istotna jest jej długość – seria krótka lub długa

3. w przypadku pomiarów pośrednich istotne jest to, czy szukana wielkość jest funkcją jednej czy kilku mierzonych wielkości

Nomenklatura

- z_p - najbardziej prawdopodobna wartość wielkości mierzonej
- Δz – niepewność pomiarowa

Nomenklatura

Błąd systematyczny – występuje zawsze niezależnie od liczby pomiarów. Źródłem błędu systematycznego jest ograniczona dokładność przyrządów pomiarowych i obserwator. W większości przypadków błąd systematyczny określony jest przez klasę przyrządów

Nomenklatura

Błąd przypadkowy – występuje tylko w przypadku serii pomiarów. Seria to wielokrotny pomiar tej samej wielkości. Źródłem błędu przypadkowego jest losowy charakter warunków pomiaru, a co za tym idzie wyników pomiaru

Nomenklatura

Średni błąd przypadkowy pomiaru:

$$s_z = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (z_i - z_{sr})^2}{n-1}}$$

Jeden pomiar, wielkość mierzona bezpośrednio

- za wartość z_p przyjmuje się wynik odczytany bezpośrednio z przyrządu pomiarowego
- za Δz przyjmuje się błąd systematyczny δ_z

Jeden pomiar, wielkość mierzona
bezpośrednio

czyli:

$$z = z_p \pm \delta_z$$

Jeden pomiar, wielkość mierzona
pośrednio

z jest funkcją zmiennych x i y :

$$z = f(x, y)$$

Jeden pomiar, wielkość mierzona
pośrednio

wynik jest przedstawiany w postaci:

$$z = z_p \pm \Delta z$$

Jeden pomiar, wielkość mierzona
pośrednio

z_p wartość funkcji f obliczona dla wartości
zmierzonych x i y

Δz obliczone metodą różniczki zupełnej

Jeden pomiar, wielkość mierzona pośrednio

$$\Delta z = \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right| \cdot \delta x + \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \cdot \delta y$$

gdzie δx i δy oznaczają odpowiednio
błąd systematyczny pomiaru zmiennej x
i błąd systematyczny pomiaru zmiennej y

Seria pomiarów, wielkość mierzona bezpośrednio

1. należy określić wielkość błędu przypadkowego s_z i porównać ją z wielkością błędu systematycznego δ_z
2. wybrać odpowiedni do relacji pomiędzy błędem przypadkowym i błędem systematycznym sposób zapisu wyniku pomiaru

Seria pomiarów, wielkość mierzona bezpośrednio

Sposób zapisu wyniku pomiaru:

a. $s_z > \delta_z \rightarrow z = z_p \pm s_z$

b. $s_z < \delta_z \rightarrow z = z_p \pm \delta_z$

c. $s_z \approx \delta_z \rightarrow z = z_p \pm \Delta z$

gdzie
$$\Delta z = \sqrt{s_z^2 + \frac{\delta_z^2}{3}}$$

Seria pomiarów, wielkość mierzona pośrednio

1. należy określić wielkości błędów przypadkowych s_x oraz s_y i porównać je z wielkościami błędów systematycznych δ_x oraz δ_y
2. wybrać odpowiedni do relacji pomiędzy błędami przypadkowymi i błędami systematycznymi sposób zapisu wyniku pomiaru

Seria pomiarów, wielkość mierzona pośrednio

Przypadek I:

$$\delta_{\mathbf{x}} > s_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{i} \quad \delta_{\mathbf{y}} > s_{\mathbf{y}} \quad \rightarrow$$

$$\Delta \mathbf{z} = \left| \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} \right| \cdot \delta \mathbf{x} + \left| \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \right| \cdot \delta \mathbf{y}$$

Seria pomiarów, wielkość mierzona pośrednio

Przypadek II:

w każdym innym przypadku →

$$\Delta z = \sqrt{\left| \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} \right|^2 \cdot (\Delta \mathbf{x})^2 + \left| \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \right|^2 \cdot (\Delta \mathbf{y})^2}$$

Seria pomiarów, wielkość mierzona pośrednio

Przypadek II c.d.:

Δx i Δy oznaczają albo tylko błędy przypadkowe s_x oraz s_y , albo błędy przypadkowe i systematyczne obliczone z prawa przenoszenia błędów:

$$\Delta x = \sqrt{s_x^2 + \frac{\delta_x^2}{3}}$$

$$\Delta y = \sqrt{s_y^2 + \frac{\delta_y^2}{3}}$$

Ćwiczenie 1

Podać wynik pomiaru jednokrotnego,
wielkości mierzonej bezpośrednio:

wzrost 174,5 cm, błąd systematyczny 0,1
cm.

Ćwiczenie 1

$174,5 \pm 0,1 \text{ cm}$

Ćwiczenie 2

Podać wynik pomiaru jednokrotnego, wielkości mierzonej pośrednio – gęstości ciała:

masa 1,47 gramów, objętość 1,28 cm³,
błąd systematyczny pomiaru masy 0,01 grama, błąd systematyczny pomiaru objętości 0,001cm³.

Ćwiczenie 2

różniczka zupełna:

$$\Delta \rho = \left| \frac{1}{\mathbf{V}} \right| \cdot \delta \mathbf{m} + \left| \frac{-\mathbf{m}}{\mathbf{V}^2} \right| \cdot \delta \mathbf{V}$$

Ćwiczenie 2

$$1,148 \pm 0,009 \text{ g/cm}^3$$

Ćwiczenie 3

Zmierzono wzrost 35 osób: 177,0 175,0
181,0 177,0 175,0 180,0 178,0 177,0
179,0 178,0 177,0 180,0 177,0 177,0
176,0 175,0 176,0 175,0 177,0 177,0
178,0 178,0 175,0 175,0 176,0 176,0
180,0 180,0 176,0 177,0 175,0 177,0
176,0 180,0 176,0 cm.

błąd systematyczny pomiaru wzrostu
wynosi 0,1 cm. Podać wynik pomiaru.

Ćwiczenie 3

$177,1 \pm 1,7 \text{ cm}$

Ćwiczenie 4

Zmierzono wzrost 35 osób: 177,8 177,6
177,8 177,7 177,6 177,9 178,1 177,9
177,6 177,8 177,6 178,0 177,8 177,7
177,6 177,5 177,8 177,6 177,8 177,7
177,8 177,6 177,6 177,7 177,9 177,7
177,8 177,9 177,8 178,0 177,6 177,8
178,0 177,9 177,6 cm.

błąd systematyczny pomiaru wzrostu
wynosi 0,3 cm. Podać wynik pomiaru.

Ćwiczenie 4

$177,8 \pm 0,3 \text{ cm}$

Ćwiczenie 5

Zmierzono wzrost 35 osób: 177,8 178,2
178,1 178,1 177,6 179,9 178,1 177,9
178,4 178,1 177,5 178,1 177,8 177,4
177,2 177,3 178,8 177,1 177,4 177,7
177,8 178,1 177,3 177,7 177,9 177,7
178,1 178,2 178,2 178,7 177,4 178,1
178,1 178,1 178,2 cm.

błąd systematyczny pomiaru wzrostu
wynosi 0,5 cm. Podać wynik pomiaru.

Ćwiczenie 5

$177,9 \pm 0,6 \text{ cm}$

Ćwiczenie 6

Zmierzono wzrost i masę ciała 35 osób:

177,8 178,2 178,1 178,1 177,6 179,9
178,1 177,9 178,4 178,1 177,5 178,1
177,8 177,4 177,2 177,3 178,8 177,1
177,4 177,7 177,8 178,1 177,3 177,7
177,9 177,7 178,1 178,2 178,2 178,7
177,4 178,1 178,1 178,1 178,2 cm;

Ćwiczenie 6

oraz odpowiednio: 72,4 73,1 72,1 74,6
71,8 75,8 72,7 80,0 77,3 75,6 77,2 73,8
74,3 76,9 78,2 71,9 81,4 72,5 74,6 82,2
71,9 81,1 75,9 77,6 78,7 78,9 76,5 79,8
72,5 78,4 73,9 76,5 79,9 80,6 75,9 kg

błąd systematyczny pomiaru wzrostu
wynosi 0,5 cm, błąd systematyczny
pomiaru masy wynosi 0,5 kg. Podać wynik
pomiaru BMI dla badanej grupy

Ćwiczenie 6

różniczka zupełna:

$$\Delta \mathbf{BMI} = \left| \frac{1}{\mathbf{h}^2} \right| \cdot \delta \mathbf{m} + \left| \frac{-2 \cdot \mathbf{m}}{\mathbf{h}^3} \right| \cdot \delta \mathbf{h}$$

lub

$$\Delta \mathbf{BMI} = \sqrt{\frac{1}{\mathbf{h}^4} \cdot (\Delta \mathbf{m})^2 + \frac{4 \cdot \mathbf{m}^2}{\mathbf{h}^6} \cdot (\Delta \mathbf{h})^2}$$

Ćwiczenie 6

$$24,0 \pm 1,0 \text{ kg/m}^2$$